Etude mathématique des probabilités de réalisation suivant la technique des tiges d'Achillée.

On commence avec $n_1 = 49$ tiges. On note s_1, s_2 et s_3 les trois chiffres (soit 2 soit 3) obtenus au cours de chacune des trois étapes suivantes.

1. On prélève une première tige puis on forme deux groupes de x_1 et y_1 tiges avec les $n_1 - 1 = 48$ tiges restantes. Chaque groupe est donc constitué de 1 à 47 tiges et l'on suppose que les 47 possibilités sont équiprobables. Le fait de retirer les tiges 4 par 4 de chacun des groupes revient à calculer modulo 4 et le nombre de tiges restant dans chaque groupe sera respectivement $x_1 \mod 4$ et $y_1 \mod 4$ (en convenant du choix non conventionnel des représentants des classes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par les nombres 1, 2, 3 et 4), donc le nombre de tiges obtenues à la première étape est

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + x_1 \mod 4 + y_1 \mod 4 \\ &= 1 + x_1 \mod 4 + (-y_1) \mod 4 \end{aligned}$$

   puisque $y_1 = n_1 - 1 - x_1$ et $n_1 - 1 \mod 4 = 0$. Il est aisé de constater que suivant les cas

   - si $x_1 \mod 4 = 1$ alors $t_1 = 1 + 1 + 3 = 5$
   - si $x_1 \mod 4 = 2$ alors $t_1 = 1 + 2 + 2 = 5$
   - si $x_1 \mod 4 = 3$ alors $t_1 = 1 + 3 + 1 = 5$
   - si $x_1 \mod 4 = 4$ alors $t_1 = 1 + 4 + 4 = 9$

   Les entiers compris entre 1 et 47 et congrus à 4 modulo 4 sont les multiples de 4, de 4 à 44 donc il y en à 11 et donc la probabilité d'obtenir $t_1 = 9$ est $\frac{11}{49}$, sinon on obtient 5 tiges. Pour résumer:

$$\begin{cases} P(s_1 = 2) = \frac{11}{47} \\ P(s_1 = 3) = \frac{36}{47} \end{cases}$$

2. Au début de cette seconde étape, il reste $n_2 = n_1 - t_1$ tiges et suivant les cas, $n_2 = 49 - 9 = 40$ où $n_2 = 49 - 5 = 44$ mais dans tous les cas, $n_2 \mod 4 = 4$. A nouveau on obtient a la seconde étape en prélevant une tige puis en partagent les $n_2 - 1$ tiges restantes en deux tas de x_2 et y_2 tiges

$$\begin{aligned} t_2 &= 1 + x_2 \mod 4 + y_2 \mod 4 \\ &= 1 + x_2 \mod 4 + (3 - x_2) \mod 4 \end{aligned}$$

   puisque $n_2 - 1 \mod 4 = 0$ dans les deux cas. Et cette fois, suivant x_2:

   - si $x_2 \mod 4 = 1$ alors $t_2 = 1 + 1 + 2 = 4$
   - si $x_2 \mod 4 = 2$ alors $t_2 = 1 + 2 + 1 = 4$

- si $x_2 \mod 4 = 3$ alors $t_2 = 1 + 3 + 4 = 8$
- si $x_2 \mod 4 = 4$ alors $t_2 = 1 + 4 + 3 = 8$

(a) Si $n_2 = 40$, (on a retiré 9 tiges à la première étape, donc c'est le cas $s_1 = 2$), $n_2 - 1 = 39$ et les nombres compris entre 1 et 38 (valeurs possibles et équiprobables de x_2) et congrus à 3 où 4 modulo 4 sont au nombre de 18 entre 1 et 36 donc

$$\begin{cases} P\left(s_2 = 2 \;/\; s_1 = 2\right) = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \\ P\left(s_2 = 3 \;/\; s_1 = 2\right) = \frac{20}{38} = \frac{10}{19} \end{cases}$$

(b) Si $n_2 = 44$, $n_2 - 1 = 43$, x_2 varie entre 1 et 42 et il y a 20 nombres congrus à 3 où 4 entre 1 et 40 si bien

$$\begin{cases} P\left(s_2 = 2 \;/\; s_1 = 3\right) = \frac{20}{42} = \frac{10}{21} \\ P\left(s_2 = 3 \;/\; s_1 = 3\right) = \frac{22}{42} = \frac{11}{21} \end{cases}$$

3. Pour cette dernière étape, il reste suivant les cas

$$\begin{array}{rll} n_3 = n_1 - t_1 - t_2 = & 49 - 9 - 8 = 32 \text{ si } s_1 = 2 \text{ et } s_2 = 2 & \text{(a)} \\ & 49 - 9 - 4 = 36 \text{ si } s_1 = 2 \text{ et } s_2 = 3 & \text{(b)} \\ & 49 - 5 - 8 = 36 \text{ si } s_1 = 3 \text{ et } s_2 = 2 & \text{(c)} \\ & 49 - 5 - 4 = 40 \text{ si } s_1 = 3 \text{ et } s_2 = 3 & \text{(d)} \end{array}$$

qui sont tous des nombres congrus à 4 modulo 4 donc il restera à nouveau à l'issu de cette étape 8 tiges si x_3 est congru à 3 où 4 modulo 4 et 4 tiges sinon. Il reste à étudier les quatre cas:

(a) $n_3 - 1 = 31$, $x_3 \in \{1, \ldots, 30\}$, le nombre d'entiers congrus à 3 où 4 modulo 4 entre 1 et 30 est 14.

$$\begin{cases} P\left(s_3 = 2 \;/\; s_2 = 2\;,\; s_1 = 2\right) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \\ P\left(s_3 = 3 \;/\; s_2 = 2\;,\; s_1 = 2\right) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \end{cases}$$

(b) $n_3 - 1 = 35$, $x_3 \in \{1, \ldots, 34\}$, le nombre d'entiers congrus à 3 où 4 modulo 4 entre 1 et 30 est 16.

$$\begin{cases} P\left(s_3 = 2 \;/\; s_2 = 3\;,\; s_1 = 2\right) = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} \\ P\left(s_3 = 3 \;/\; s_2 = 3\;,\; s_1 = 2\right) = \frac{18}{34} = \frac{9}{17} \end{cases}$$

(c) idem que le cas (b)

$$\begin{cases} P\left(s_3 = 2 \;/\; s_2 = 2\;,\; s_1 = 3\right) = \frac{8}{17} \\ P\left(s_3 = 3 \;/\; s_2 = 2\;,\; s_1 = 3\right) = \frac{9}{17} \end{cases}$$

(d) idem que le cas (a) de la seconde étape

$$\begin{cases} P\left(s_3 = 2 \;/\; s_2 = 3\;,\; s_1 = 3\right) = \frac{9}{19} \\ P\left(s_3 = 3 \;/\; s_2 = 3\;,\; s_1 = 3\right) = \frac{10}{19} \end{cases}$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer la formule de Bayes et ajouter toutes les situations menant au même trait.

- 6, Vieux Yin:

$$\begin{aligned} P(6) &= P(s_1 = s_2 = s_3 = 2) \\ &= P(s_3 = 2 \ / \ s_2 = 2 \ , \ s_1 = 2)\, P(s_2 = 2 \ / \ s_1 = 2)\, P(s_1 = 2) \\ &= \frac{7}{15}\frac{9}{19}\frac{11}{47} = \frac{693}{13395} = \frac{231}{4464} \simeq 0,052 \end{aligned}$$

- 7, Yang

$$\begin{aligned} P(7) &= P((s_1, s_2, s_3) \in \{(2,2,3), (2,3,2), (3,2,2)\}) \\ &= \frac{8}{15}\frac{9}{19}\frac{11}{47} + \frac{8}{17}\frac{10}{19}\frac{11}{47} + \frac{8}{17}\frac{10}{21}\frac{36}{47} \\ &= \frac{264}{4465} + \frac{880}{15181} + \frac{960}{5593} = \frac{153416}{531335} \simeq 0,289 \end{aligned}$$

- 8, Yin

$$\begin{aligned} P(8) &= P((s_1, s_2, s_3) \in \{(2,3,3), (3,2,3), (3,3,2)\}) \\ &= \frac{9}{17}\frac{10}{19}\frac{11}{47} + \frac{9}{17}\frac{10}{21}\frac{36}{47} + \frac{9}{19}\frac{11}{21}\frac{36}{47} \\ &= \frac{990}{15181} + \frac{1080}{5593} + \frac{1188}{6251} = \frac{47646}{106267} \simeq 0,448 \end{aligned}$$

- 9, Vieux Yang

$$\begin{aligned} P(9) &= P(s_1 = s_2 = s_3 = 3) \\ &= \frac{10}{19}\frac{11}{21}\frac{36}{47} = \frac{3960}{18753} = \frac{1320}{6251} \simeq 0,211 \end{aligned}$$

Pour finir cette petite analyse, il reste à en tirer les conséquences. De façon évidente, les tirages des hexagrammes ne sont pas équiprobables. La probabilité d'un hexagramme est caractérisée par les nombres de traits de chaque espèce que l'on notera k_6, k_7, k_8 et k_9 $(k_6 + k_7 + k_8 + k_9 = 6)$ et la loi est alors donnée par

$$P(k_6, k_7, k_8, k_9) = \frac{6!}{k_6!k_7!k_8!k_9!} P(6)^{k_6}\, P(7)^{k_7}\, P(8)^{k_8}\, P(9)^{k_9}$$

Notons que s'il y a $4^6 = 4096$ hexagrammes différents, il y a exactement $C_9^6 = 84$ possibilités d'hexagrammes en ne tenant pas compte de l'ordre donc 84 probabilités différentes, et les probabilités vont de 6 vieux Yin de probabilité $P(6)^6 \simeq 20$ pour un milliard à 6 Yin de probabilité $P(8)^6 \simeq 8$ pour mille, à comparer avec les tirages équiprobables où chaque hexagramme a la même probabilite de sortir qui est $\frac{1}{4096} \simeq 1$ pour quatre mille.