

# MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE CHEZ J. S. BACH

Athanase PAPADOPOULOS<sup>1</sup>

CNRS et Université Louis Pasteur

## Introduction

L'année 2000 a été retenue comme année mondiale des mathématiques. On y célèbre le 250<sup>e</sup> anniversaire de J. S. BACH, et pour cette raison elle a été aussi déclarée année BACH. Ceci est une heureuse coïncidence car, comme il est bien connu, il existe une relation entre BACH et les mathématiques. Notre but dans cet article est de décrire certains aspects de cette relation.

L'article est divisé en trois parties. Dans la première partie, on évoque l'époque de BACH, le siècle des lumières, époque où, dans une partie du continent européen, la relation entre les arts et les sciences (et en particulier entre la musique et les mathématiques) occupait une place privilégiée dans la société cultivée. Dans la seconde partie, on considère la technique musicale du contrepoint en tentant d'exposer certaines des idées mathématiques qui y interviennent et en donnant des exemples dans les œuvres de BACH. Dans la troisième partie, on s'intéresse à la numérogie chez BACH.

Je remercie Roland VENDROUX de m'avoir indiqué il y a quelque temps la référence [4], et Bruno BERNARDOFF pour son aide éditoriale.

## 1 L'époque de BACH

### Le siècle des lumières

BACH a vécu au XVIII<sup>e</sup> siècle, que l'on appelle le *siècle des lumières*, caractérisé par une effervescence intellectuelle, tant artistique que littéraire et scientifique. Une vaste culture générale était présente chez de nombreuses personnes à divers degrés dans la société. Les grandes découvertes du siècle précédent avaient été assimilées et poursuivies à un haut niveau, et un effort considérable de vulgarisation des connaissances, fait par de grands maîtres, souvent munis d'un savoir encyclopédique, avait mis la science à la portée de tous ceux qui s'y intéressaient. Parmi les ouvrages célèbres de vulgarisation, citons le traité de *Mathématique universelle abrégée à l'usage et à la portée de tout le monde* (1728) du P. Louis-Bertrand CASTEL, musicologue, inventeur du clavecin oculaire et professeur de mathématiques à Louis-le-Grand. Mais on pense surtout au travail fait par DIDEROT et D'ALEMBERT, éditeurs et principaux auteurs du *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, qui fut la première encyclopédie au sens moderne du terme. Dans son

---

1. Adresse de l'auteur : Institut de mathématiques, 7 rue René Descartes, 67084 STRASBOURG CEDEX, Email : [papadopoulos@math.u-strasbg.fr](mailto:papadopoulos@math.u-strasbg.fr)

© L'OUVERT 100 ( 2000)

*Discours préliminaire* de l'Encyclopédie (1751), D'ALEMBERT écrit : «Pour peu que l'on ait réfléchi sur la liaison que les découvertes ont entre elles, il est facile de s'apercevoir que les sciences et les arts se prêtent mutuellement des secours et qu'il y a par conséquent une chaîne qui les unit».

Il était courant au XVIII<sup>e</sup> siècle que des artistes rapportent sur des sujets scientifiques et, inversement, que des scientifiques écrivent sur des sujets artistiques. VOLTAIRE publia en 1738 ses *Éléments de la philosophie de NEWTON mise à la portée de tout le monde*. Francesco ALGATORI venait de publier son livre *Il Newtonianismo per le dame*, destiné à expliquer aux dames Italiennes la théorie de l'optique de NEWTON. Un peu plus tard, Tom TELESCOPE publia en Angleterre un ouvrage similaire, *The Newtonian system of philosophy adapted to the capacities of young gentlemen and ladies*. DIDEROT travailla à une encyclopédie musicale et traduisit de l'anglais le dictionnaire de médecine de JAMES. Il publia en 1748 ses *Mémoires sur différents sujets de mathématiques*<sup>2</sup> et en 1765 son *Essai sur la peinture*. ROUSSEAU était aussi compositeur et botaniste. Il publia en 1750 son *Discours sur les sciences et les arts*. Le mathématicien D'ALEMBERT, qui était en même temps membre de l'Académie Royale des Sciences et de l'Académie Française, publia en 1752 ses *Éléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M. RAMEAU*, et il existe beaucoup d'autres exemples.

Dans les pays de langue germanique, même si l'esprit des lumières était moins prononcé qu'en France ou en Angleterre (on se souvient que la culture allemande, à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, avait été saccagée à la suite de la Guerre de Trente ans), les gouverneurs des villes où BACH a vécu (Weimar, Dresde, Leipzig, etc.) et les empereurs tels que FRÉDÉRIC II et JOSEPH II, qui étaient souvent des protecteurs des musiciens, étaient animés d'un esprit d'ouverture propre aux lumières, lié à une volonté de modernisation de l'empire. FRÉDÉRIC II, qui a régné sur la Prusse de 1740 à 1786, était compositeur et aimait être entouré de philosophes, de mathématiciens et de musiciens. L'esprit des lumières qui en résultait (l'*Aufklärung*) avait une précieuse influence sur la grande bourgeoisie germanique. Cela a conduit, dans plusieurs villes d'Allemagne et d'Autriche, à la fondation de théâtres, à la publication de revues à caractère scientifique ou artistique (ou les deux à la fois) et à la création de sociétés savantes dont le but était de promouvoir la relation entre les sciences et les arts. Nous nous intéressons plus particulièrement ici à la société Mizler, dont BACH a fait partie.

### La société Mizler

La *Société des correspondants pour les sciences musicales* ("Correspondierende Societät der musicalischen Wissenschaften"), connue aussi sous le nom de Société Mizler, fut fondée à Leipzig en 1738 par Lorenz Christoph MIZLER, Giacomo de LUCCHESINI et Georg Heinrich BÜMLER. Pour devenir membre de cette société, il fallait être musicologue ou compositeur, et, de plus, avoir des compétences assez

---

2. Puisque l'on va parler de mathématiques et de musique, il est intéressant de noter que trois des cinq mémoires mathématiques de DIDEROT sont reliés à la musique ; ce sont ses *Principes généraux de l'Acoustique*, son *Examen d'un Principe de mécanique sur la tension des cordes* et son *Projet d'un nouvel orgue*.

poussées dans un domaine scientifique. Le membre fondateur L. C. MIZLER était lui-même musicien, mathématicien, juriste, médecin et théologien. Il avait été élève de BACH, en clavecin et en composition, entre 1731 et 1733, en même temps qu'il poursuivait des études de théologie à l'université de Leipzig<sup>3</sup>.

Il était demandé aux membres de la société de correspondre régulièrement entre eux, et chacun de ces membres devait présenter tous les ans au secrétaire de la société (qui était L. C. MIZLER) un mémoire à caractère scientifique. En fait, le règlement précisait même que ce mémoire devait utiliser des idées mathématiques. Une copie du mémoire était ensuite envoyée à tous les autres membres, et l'on demandait à chacun d'entre eux de donner son avis sur le travail. Il est intéressant de noter que BACH a présenté, en guise de mémoire scientifique, en 1747, 1748 et 1749, qui sont les trois années durant lesquelles il était membre de la société (et qui sont aussi les trois avant-dernières années de sa vie), des manuscrits de trois de ses œuvres musicales majeures, les *Variations canoniques*, l'*Offrande musicale* et l'*Art de la fugue*. Il était donc entendu qu'il y a des idées mathématiques sous-jacentes à ces œuvres, et l'on parlera de cela plus bas, après avoir rappelé quelques éléments de l'art du contrepoint.<sup>4</sup>

Il est intéressant de noter au passage un fait relié aux préoccupations numérolologiques de BACH. Ce dernier a adhéré à la société Mizler en 1747, comme 14<sup>e</sup> membre, et il est légitime de se demander pourquoi BACH a attendu si longtemps avant d'y adhérer, alors qu'il avait très probablement été pressenti par son ancien élève MIZLER depuis la fondation de la société. La réponse que l'on donne en général vient de l'importance du nombre 14 pour BACH, ce nombre qui est égal à la somme des valeurs numériques des lettres de son nom :  $BACH=2+1+3+8=14$ , et qui revient si souvent dans sa musique. On parlera de cela dans la troisième partie de cet article.

## 2 Le contrepoint, les mathématiques et BACH

### La technique du contrepoint

Le contrepoint est une méthode de composition musicale, qui consiste à superposer des lignes mélodiques de telle sorte que quand la pièce est interprétée (et si elle l'est correctement), chaque ligne est mise en valeur, de façon à ce que l'oreille

---

3. MIZLER disait qu'il avait étudié la médecine dans le but de pouvoir mieux s'occuper de sa santé physique. Il l'a exercée à partir de 1749, comme médecin à la cour de Varsovie.

4. Notons qu'à part J. S. BACH, d'autres compositeurs importants ont fait partie la société Mizler. Il y a par exemple Georg Philipp TELEMANN, qui a adhéré à la société en 1739 comme 6<sup>e</sup> membre, Georg Frederich HAENDEL, qui y a adhéré en 1745 comme 11<sup>e</sup> membre, et Leopold MOZART, qui y a adhéré en 1755, année où cette société a été dissoute, comme 21<sup>e</sup> et dernier membre. On sait que Leopold MOZART était un passionné de mathématiques et de sciences en général. Il possédait deux microscopes et un télescope, et c'est lui qui a pourvu à l'éducation de ses enfants. On sait aussi que G. P. TELEMANN, depuis son jeune âge, s'est intéressé à la relation entre mathématiques et musique, grâce à l'enseignement de Caspar CALVOER. HAENDEL était un personnage cosmopolite, qui avait étudié le droit, et avant d'accepter son élection à la société Mizler, il avait refusé un titre de Docteur *Honoris Causa* de l'université d'Oxford, invoquant un surmenage.

puisse apprécier en même temps la beauté de toutes les lignes et de leurs combinaisons (et non pas seulement celle des accords produits par les superpositions). Il existe des techniques spéciales de composition en contrepoint, qui ont peu évolué le long des siècles. Ces techniques sont basées sur des transformations simples que l'on applique à un certain motif mélodique de départ, que l'on peut décrire de façon mathématique, et sur lesquelles on dira quelques mots plus bas. Les transformations qui sont appliquées au motif mélodique de départ, permettent de produire d'autres motifs, qui sont "dans le même esprit" que le motif de départ (on dit que les motifs mélodiques sont obtenus les uns à partir des autres par des procédés d'*imitation*). Le compositeur doit ensuite combiner correctement les motifs obtenus et gérer leur entrecroisement et les harmonies qui en résultent. Les transformations utilisées sont essentiellement des symétries (et ces symétries sont visuelles, sur la partition musicale), des translations dans le registre des fréquences, et des homothéties du point de vue des durées. Dans tous les cas, ce sont des transformations qui présentent un aspect mathématique certain et que le compositeur applique à des degrés divers de rigueur. Il est généralement admis que l'art du contrepoint a atteint son apogée chez Josquin DES PRÈS, puis chez MONTEVERDI, et ensuite chez BACH, ce dernier l'ayant appliqué avec une rigueur quasi parfaite. On en verra des exemples plus loin. Ajoutons que le courant sériel de la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, dû en premier lieu à SCHÖNBERG et son école, a mis en valeur une utilisation formelle et presque abstraite de ces techniques de contrepoint. Il va sans dire que la rigueur de la technique contrapuntique est toujours utilisée avec une entière liberté, et jamais de façon purement mécanique. La qualité du résultat musical dépend d'un équilibre subtil entre l'aspect rationnel et l'aspect émotionnel, équilibre que le compositeur doit trouver, le but de ces combinaisons et de ces frictions de voix étant de produire une musique chargée de lyrisme et d'émotions, et qui fasse vibrer l'âme.

On fait remonter généralement la technique du contrepoint au XIV<sup>e</sup> siècle, et il est intéressant de noter ici, puisque l'on parle de relation entre science et musique, que l'un des principaux traités théoriques de contrepoint, *Il primo libro della prattica del contrapunto intorno all'uso delle consonanze*, a été écrit par Vincenzo GALILEI, le père de l'astronome Galileo GALILEI<sup>5</sup>.

Revenons un peu sur ces transformations que l'on applique en contrepoint à un motif musical donné. Si l'on exclut pour le moment celles qui dilatent ou qui

---

5. Vincenzo GALILEI est le type même de l'humaniste de la Renaissance : physicien, mathématicien, musicologue, compositeur, facteur d'instruments de musique, chanteur, joueur de luth, etc. Ses compositions telles que les *contrapunti a due voci* (1584) sont parfois citées comme de bons exemples d'écriture contrapuntique du XVI<sup>e</sup> siècle. En 1588, il publie son traité *Il primo libro della prattica del contrapunto intorno all'uso delle consonanze*, dans lequel il adapte de manière systématique la technique du contrepoint aux nouveaux modes d'expression musicale (en particulier le traitement et la bonne répartition des dissonances). Dans un autre traité, *Dialogo della musica antica e della moderna* (1581), il aborde la musicologie de manière scientifique, en tenant compte des découvertes acoustiques récentes. En 1590, il réalise des expériences pour faire des calculs de rapports de fréquences émises par des cordes vibrantes en fonction de la tension de ces cordes, ainsi que des calculs de rapports de fréquences émises par des tuyaux en fonction du volume d'air qu'ils contiennent. Ces expériences corrigent certains résultats attribués à PYTHAGORE, et Vincenzo GALILEI les décrit dans son *Discorso particolare intorno all'unisono*. Elles sont reprises par son fils Galileo GALILEI, dans ses fameux *Discorsi e dimostrazioni matematiche*.

contractent l'échelle des temps, on trouve trois transformations de base. Il y a d'abord la *transposition*, qui consiste à reprendre le motif à un registre plus haut ou plus bas que le motif initial, ce qui correspond donc à une translation au niveau des hauteurs des notes<sup>6</sup>. La deuxième transformation est celle de *rétrogradation*, qui consiste à lire la suite des notes à l'envers. En représentation graphique (sur la partition musicale), la rétrogradation correspond donc à une symétrie par rapport à une ligne verticale. La troisième transformation, appelée *renversement*, consiste à appliquer une symétrie par rapport à une ligne horizontale. L'opération de renversement inverse la direction de tous les intervalles musicaux contenus dans le motif initial. En plus de ces transformations, il y a celles qui changent l'échelle des durées. Par exemple, il y a des transformations qui multiplient par un facteur constant toutes les durées. On parle d'*imitation par augmentation* ou par *diminution*, suivant que le facteur de dilatation est plus grand ou plus petit que 1. Par exemple, on peut transformer un motif musical en remplaçant les rondes par des blanches, les blanches par des noires, les noires par des croches, et ainsi de suite. Le nouveau motif est alors une diminution du premier (de facteur deux). Il y a aussi les transformations qui utilisent de nouveaux rythmes en gardant la durée totale de chaque note. Par exemple, on peut remplacer une ligne mélodique n'utilisant que des noires par une ligne utilisant les mêmes notes mais dont les valeurs sont des croches pointées - double croches. Il y a enfin toutes les compositions possibles de ces transformations (on parle de renversement-rétrogradation, etc.)

On peut rappeler ici que des théoriciens de la musique, au XX<sup>e</sup> siècle, ont introduit dans l'enseignement du contrepoint un formalisme purement mathématique, dans lequel les 12 notes de la gamme chromatique sont représentées par la suite d'entiers  $0, 1, \dots, 11$ . Une transposition est alors représentée par une translation modulo 12, un renversement par l'application  $x \mapsto -x$  modulo 12, et une rétrogradation par l'application qui à une suite  $n_0, n_1, \dots, n_p$  fait correspondre la suite  $n_p, \dots, n_1, n_0$ <sup>7</sup>. Ces transformations élémentaires jouent alors le rôle de générateurs d'un certain groupe de transformations qui peut intéresser un mathématicien (voir par exemple [5]).

La technique du contrepoint est utilisée par excellence dans la composition de fugues et de canons. Les fugues sont nécessairement à plusieurs voix (le motif et ses imitations sont jouées à des registres différents), alors qu'un canon peut être à une seule voix (les imitations peuvent être toutes identiques au motif de base ; elles sont jouées avec un décalage dans l'échelle des temps). Notons qu'il peut y avoir dans un canon ou dans une fugue plusieurs motifs de base (appelés aussi *sujets*). Un canon est dit *simplex* s'il possède un seul sujet, *duplex* s'il en possède deux, *triplex* s'il en possède trois, et ainsi de suite. En général, un canon a plus de régularité qu'une fugue (par exemple, un canon peut consister en une répétition périodique d'une seule ligne mélodique), ce qui fait qu'un canon est en général moins complexe qu'une fugue. Il y a dans un canon une idée de *développement perpétuel*, ainsi qu'une idée de *musique automatique*. Dans une fugue, il y a en général une plus grande complexité dans

---

6. Au niveau des fréquences, la transposition correspond à une translation, pourvu que l'on choisisse une échelle de mesure logarithmique.

7. Ce genre de considérations a été développé en particulier par Milton BABBITT, compositeur qui a été aussi professeur de mathématiques et professeur de musicologie à l'université de Princeton.

la combinaison des lignes, une dimension de liberté, un *développement*, que l'on ne trouve pas dans un canon.

Il est intéressant mentionner, en parlant de canon, un point de notation musicale qui est propre à ce type de musique, qui est la notation que l'on appelle *énigmatique*. Dans ce type de notation, le compositeur indique de façon concise les différentes symétries qui sont utilisées dans la pièce. Il écrit le motif mélodique de base, et puis, grâce à un système de notations sybillines (parfois propre au compositeur lui-même), il indique à l'interprète la séquence des lignes mélodiques qui doivent être obtenues à partir de ce motif de base, leurs combinaisons, l'ordre dans lequel elles doivent être exécutées, etc. Par exemple, une clé de sol à la fin de la ligne mélodique, écrite à l'envers (symétrie par rapport à une ligne verticale) indique que l'on doit jouer une imitation en mouvement rétrograde. Un signe spécial indique l'endroit où cette imitation doit commencer. Un canon écrit en notation énigmatique s'appelle *canon énigmatique*. Une partition complète écrite à partir d'un canon en notation énigmatique s'appelle une *solution* du canon. Parfois, certains signes manquent (l'exécutant est censé les trouver tout seul), et le canon est encore plus "énigmatique". Il est bien connu que certains canons énigmatiques posent de vrais problèmes mathématiques pour leur solution, et certains admettent plusieurs solutions. La notation énigmatique date du moyen-âge, et BACH l'a utilisé couramment, peut-être dans le but d'économiser du papier (on sait que c'était l'une de ses préoccupations), mais plus probablement pour son amour des idées abstraites que ces énigmes présentent.

Notons à ce propos que le règlement de la société Mizler demandait à chaque nouveau membre de fournir une peinture à l'huile représentant son portrait, avec un signe distinctif. On sait que BACH a donné un portrait peint par Elias Gottlieb HAUSSMANN, qui le représente en buste, tenant une partition de son canon triplex à six voix BWV 1076, qui est un canon énigmatique<sup>8</sup>.

### **Le contrepoint dans la musique de BACH**

BACH a utilisé les techniques du contrepoint dans presque toutes ses pièces, et on considère qu'il a atteint le sommet de la perfection dans cet art. On pense bien sûr aux pièces instrumentales intitulées *canons* ou *fugues*, mais il y a aussi le contrepoint des cantates, passions, oratorios, concertos, etc. Il est bien connu que l'interprétation des fugues de BACH exige en général, de la part de l'exécutant, une parfaite maîtrise de l'instrument, et parfois un degré de virtuosité extrême. On pense en particulier aux 48 fugues des deux volumes du *Clavecin bien tempéré*, à la fugue BWV 547 pour 5 voix pour orgue, aux fugues dont la polyphonie est très complexe, écrites pour des instruments *a priori* monodiques, comme les fugues des trois sonates pour violon solo, etc. Il est inutile de dresser ici une liste complète des canons et fugues de BACH, et on va plutôt dire quelques mots sur certaines pièces qui contiennent une collection importante de fugues ou de canons, pièces qui, en plus de leur intérêt du point de vue strictement contrapuntique, possèdent des structures mathématiques qui ont un caractère global.

---

8. Il semble que ce portrait, ainsi qu'une copie ultérieure réalisée par HAUSSMANN lui-même, soient les seuls, parmi ceux qui nous sont parvenus, dont l'origine est certaine.

Un ensemble de fugues bien connu est celui des deux cahiers de préludes et fugues du *Clavecin bien tempéré*. Chaque volume contient 24 préludes et fugues, écrits suivant une progression rigoureuse dans l'ordre tonal chromatique.

Les *Variations Goldberg* contiennent un ensemble important de canons. Cette pièce consiste en 30 variations sur une *Aria*. Chaque variation dont le nombre est un multiple de trois est un canon. Cette suite de canons possède une propriété linéaire dans ce que l'on appelle les *intervalles canoniques*<sup>9</sup>. Le premier de ces neuf canons est à l'unisson, le second à la seconde, le troisième à la tierce, et ainsi de suite jusqu'au neuvième, à la neuvième. Tous les canons ont des mètres différents à l'exception du 3<sup>e</sup> et du 9<sup>e</sup> (symétriques par rapport au milieu de la pièce), qui sont tous les deux en 4:4. Une autre propriété "mathématique" des *Variations Goldberg* est dans la longueur des pièces. Il y a en tout 32 parties: l'*Aria* du début, les 30 variations, et l'*Aria* reprise à la fin. La longueur de l'*Aria* est de 32 mesures. La longueur de chaque variation est aussi de 32 mesures, exceptées les variations 3, 9, 21 et 30, qui font 16 mesures chacune, ainsi que la variation 16, qui est au milieu de la pièce, qui en fait 48.

Il est intéressant de noter ici qu'un exemplaire de l'édition originale des *Variations Goldberg* a été trouvé par hasard en 1975 dans une bibliothèque privée à Strasbourg, copie ayant probablement appartenu à J. S. BACH lui-même, et qui contient, en dernière page, écrits de la main propre de BACH, 14 nouveaux canons (de nouveau le nombre fétiche 14). Ces canons sont tous en notation énigmatique, et ils sont basés sur les huit premières notes de la basse de l'*Aria* des *Variations Goldberg*. Deux de ces canons étaient déjà connus (l'un d'eux est le canon BWV 1076 du portrait de HAUSSMANN mentionné ci-dessus).

D'autres compositions de BACH, qui sont très importantes du point de vue contrapuntique, sont les pièces que l'on a mentionnées en relation avec la Société Mizler; ce sont les *Variations canoniques*, l'*Art de la fugue* et l'*Offrande musicale*. On va parler ici de l'*Offrande musicale*. On reviendra sur l'*Art de la fugue* à la fin de l'article.

Dans l'*Offrande musicale*, le canon 1 (canon à l'écrevisse) constitue un exemple spectaculaire de l'usage de la symétrie par BACH. Ce canon admet une symétrie complète. La pièce est à deux voix (elle peut être jouée par exemple par deux violons, ou par un violon et une flûte, ou encore par un clavecin<sup>10</sup>). BACH a donné la partition de ce canon (comme la plupart de ceux de l'*Offrande*) sous forme énigmatique. Il a écrit la première voix, et puis, a indiqué par un signe que la deuxième voix doit être

---

9. Il s'agit de l'intervalle musical qui sépare le sujet de son imitation. On dit que le canon est à l'unisson si l'imitation est sur le même degré que le sujet, à la seconde si elle en est séparée par un intervalle de seconde, à la tierce l'intervalle est une tierce, etc.

10. Notons que pour certaines pièces comme celle-ci, BACH n'a pas donné d'indication quant à l'instrument qui doit la jouer, et cela renforce l'idée que BACH s'intéressait plus à la structure de la musique qu'il écrivait qu'au timbre. La question du choix de l'instrument paraissait secondaire pour lui. Rappelons que cette pièce a été présentée à la Société Mizler comme une *musique théorique*. Signalons enfin qu'il y a eu plusieurs arrangements différents de l'*Offrande musicale* pour instruments divers (duo, quatuor à cordes, orchestre de chambre, etc.) L'idée d'écrire des arrangements de pièces de BACH trouve sa motivation dans le fait que BACH lui-même a écrit divers arrangements pour clavier de concertos de VIVALDI, TELEMANN et d'autres.

le symétrique complet (symétrie verticale) de la première. Ainsi, si la pièce est jouée en sens rétrograde (c'est-à-dire en commençant par la fin, et en lisant les notes dans l'ordre inverse), le résultat musical est le même (si les deux voix sont jouées par le même instrument, par exemple deux violons). Il faut mentionner ici que la pièce est longue de 18 mesures, et que par conséquent il est impossible de se rendre compte de cette symétrie par le seul fait d'écouter la pièce. Il n'y donc pas de contenu musical à cette symétrie. C'est une symétrie abstraite, qui est là uniquement pour l'amour que BACH portait pour les structures symétriques.

Dans le canon 3 (*Canon per Motum Contrarium*), l'une des voix est le symétrique complet, par rapport à une ligne horizontale, d'une autre voix, translaté horizontalement de deux temps.

Dans le canon 4 (*Canon per Augmentationem, contrario Motu*), la voix supérieure est, du point de vue des durées, une dilatation par un facteur deux de la voix la plus basse. BACH aimait certainement ce genre d'astuce, et sur le manuscrit de la pièce qu'il a envoyée au roi de Prusse FRÉDÉRIC II (qui était le dédicataire de la pièce), il écrivit, en guise de dédicace : «Que la fortune du roi croisse avec les notes».

On trouve un nouveau type de structure linéaire dans le canon 5 (*Canon per Tonos*), dans lequel la modulation augmente de façon rigoureuse par tons entiers (Do min, ré min, mi min, fa $\sharp$  min, sol $\sharp$  min, si $\flat$  min, do min). Ici, BACH écrivit comme dédicace : «Que la gloire du roi augmente avec la modulation».

On pourrait continuer à trouver des structures mathématiques dans tous les canons de l'*Offrande Musicale*. Signalons que BACH a donné comme titre aux canons 9 et 10 *Quaerendo invenietis* (vous trouverez en cherchant).



Le canon triplex à 6 voix BWV1076, en écriture énigmatique

FIGURE 1



La solution (écriture complète) du canon BWV1076

FIGURE 2

### 3 BACH et la numérologie

#### La numérologie et la gématrie

Pour des raisons souvent personnelles et parfois mystérieuses et difficiles à expliquer, certains nombres particuliers ont exercé (et exercent) une fascination chez certaines personnes, et ces personnes ont le sentiment que les nombres peuvent être dotés d'une signification, plus ou moins mystique, qui peut être révélée aux initiés. La numérologie est la science dont l'objet est la symbolique des nombres.

Même si l'étude de la symbolique des nombres n'est pas à proprement parler une branche des mathématiques, on ne peut nier le fait qu'elle soit reliée d'une manière ou d'une autre aux mathématiques. D'abord parce qu'elle fait intervenir des opérations sur des nombres (même si ces opérations sont très simples), et pour un non-mathématicien, il est peut-être plus facile de concevoir qu'une théorie qui est basée sur des considérations sur des nombres fasse partie des mathématiques que de réaliser que des notions plus abstraites telles que la symétrie, le hasard, le discret et le continu, etc. (qui interviennent également en musique) sont, autant que les nombres, à la base des mathématiques. Une autre raison pour laquelle la symbolique des nombres est reliée aux mathématiques est d'ordre historique. La naissance et les premiers développements des mathématiques, par exemple dans l'école pythagoricienne, ont été accompagnés d'un intérêt certain pour la symbolique des nombres. Les principaux traités de mathématiques de la Grèce antique qui nous sont parvenus contiennent tous des considérations de symbolique des nombres. Cela se répercute d'ailleurs dans certains mots techniques de l'arithmétique (*nombre parfait, nombre irrationnel, nombres amicaux*, etc.)

Un sujet qui est très proche de la numérologie est la *gématrie* (ou *gematria*). C'est un ensemble de techniques par lesquelles on associe un nombre entier à chaque lettre de l'alphabet. Cela permet de donner un nouveau sens à un texte, grâce à certaines manipulations arithmétiques, par exemple en remplaçant certains mots par d'autres mots qui ont la même valeur numérique.

Il y a diverses manières d'associer des nombres aux lettres de l'alphabet. La règle la plus simple consiste à donner à chaque lettre son numéro dans l'ordre alphabétique, mais d'autres règles ont été aussi utilisées, certaines faisant intervenir la suite des carrés des nombres entiers, ou bien la suite des nombres premiers, ou encore la suite de FIBONACCI, etc.

La gématrie peut être considérée comme faisant partie de la numérolgie. Par sa nature même, c'est une science occulte (comme d'ailleurs la numérolgie), parce que ses méthodes (même si elles sont en général très naïves) restent cachées. Notons que la gématrie a été utilisée dans la littérature latine, comme un procédé de rhétorique, pour renforcer l'intérêt dans un discours, en donnant l'impression qu'il contient un sens caché. Il est bien connu aussi que cette science a été utilisée couramment au moyen-âge par les cabbalistes juifs, comme méthode d'exégèse, pour proposer de nouvelles interprétations à des textes sacrés (en particulier, aux textes qui sont peu clairs).

La numérolgie et la gématrie étaient en vogue en Allemagne à l'époque de BACH. On peut donner plusieurs explications à cela. D'un côté, le XVIII<sup>e</sup> siècle allemand connaissait un regain d'intérêt pour la littérature classique grecque et latine, et d'un autre côté, on sait que certaines traditions ésotériques, comme la franc-maçonnerie, la théosophie, ou la fraternité des Rose-croix étaient très présentes dans la société allemande du XVIII<sup>e</sup> siècle, et l'usage de symbolismes comme ceux de la numérolgie était assez courant dans ces traditions<sup>11</sup>.

Diverses études ont été faites sur la numérolgie et la gématrie dans la composition musicale, et même si nous nous intéressons ici en particulier à BACH, il est bon de mentionner que BEETHOVEN, MOZART, BARTOK, SCHÖNBERG et beaucoup d'autres compositeurs étaient fascinés par les nombres et ont pratiqué la numérolgie. Chacun d'eux avait sa collection de "nombres fétiches", et il existe des analyses musicales de leurs oeuvres qui tiennent compte de ce fait. Le travail le plus complet sur la numérolgie chez BACH est certainement celui de van HOUTEN et KASBERGEN [4] auquel nous avons emprunté nos exemples ci-dessous. Sur BEETHOVEN et MOZART, on renvoie à [3]. Signalons au passage deux très bonnes biographies de BACH, [1] et [2].

### **BACH et la numérolgie**

Nous avons déjà mentionné le fait que BACH était intéressé par la numérolgie, et que ceux qui ont étudié la question pensent que dans sa musique, il a utilisé intentionnellement, et de façon systématique, certains nombres comme 14, 41, 48, 158, etc. On ne peut rien affirmer de façon certaine à cet égard, car on n'a aucun témoignage direct de BACH (ce qui par ailleurs est normal, car la plupart de ceux qui ont pratiqué la numérolgie sont restés secrets à ce sujet). Mais le nombre d'exemples qui concordent est troublant. De plus, on sait qu'un cousin de BACH, Johann Gottfried WALTHER, qui était aussi un de ses meilleurs amis, a écrit un livre sur l'usage de la symbolique des nombres en musique.

Il est inutile de tenter de dresser une liste complète d'occurrences numérolgiques

---

11. Par exemple, il est généralement admis que BACH faisait partie de la fraternité des Rose-croix et que MOZART et HAENDEL étaient francs-maçons.

chez BACH. Mentionnons toutefois deux exemples. D'abord celui du choral *Das alte Jahr vergangen ist (Orgelbüchlein 16)*. Cette pièce est longue de 12 mesures (le nombre de mois dans l'année), et contient 365 notes (le nombre de jours). Un autre exemple est celui du prélude *Dies Sind die heil'gen zehn Gebot' (Clavierübung III)*, dans lequel il y a 10 entrées du thème, symbolisant les 10 commandements. Ces exemples, ainsi que plusieurs autres, sont discutés dans [4].

En ce qui concerne la gématrie, plusieurs études ont montré que BACH avait l'habitude d'inclure sa signature, sous une forme apocryphe, dans ses œuvres, en utilisant des nombres qui représentent la suite de lettres qui forment son nom. Nous avons déjà mentionné que 14 était un tel nombre, puisqu'il peut être obtenu en ajoutant la valeur numérique des lettres du mot BACH :  $2+1+3+8=14$ . D'autres nombres que BACH a utilisé couramment sont  $41=9+18+2+1+3+8=JSBACH$ ,  $158=JOHANN SEBASTIAN BACH$ , et ainsi de suite<sup>12</sup>.

Par exemple, le nombre total de notes dans le Prélude et fugue N° 1 du premier livre du *Clavecin bien tempéré* est 1283, un nombre obtenu en juxtaposant les valeurs numériques des quatre lettres BACH. Le thème de la fugue en question est formé de 14 notes. Dans la suite de 14 mesures qui débute à la mesure 14 de cette fugue, le thème est exposé 14 fois.

Un autre exemple est celui des 15 inventions à trois voix (les *Sinfoniae*). Les longueurs de la première et de la dernière pièce sont respectivement de 21 et 38 mesures. Ainsi, ces 15 inventions sont comprises entre les 4 lettres du nom BACH. Le lecteur trouvera dans [4] une multitude d'exemples de ce type.

Terminons par quelques mots sur le contenu numérolgique de l'*Art de la fugue*. C'est une pièce qui est chargée de mystères, et elle est considérée, pour plusieurs raisons, comme le testament musical de BACH. De plus, BACH y atteint le sommet de la perfection dans l'art du contrepoint. Le manuscrit de l'*Art de la fugue* est incomplet, et il semble que BACH ait intentionnellement arrêté cette composition, sans jamais la terminer, un an avant sa mort. La pièce contient 14 fugues (BACH), plus la dernière, qui est inachevée. Il y a un thème commun aux 13 premières fugues, et un nouveau thème pour la quatorzième. Le nouveau thème comporte 41 notes (JSBACH). La dernière fugue contient 238 mesures qui sont complètes, et la dernière, qui est incomplète. (On a vu que les chiffres 2, 3, 8, 1 représentent aussi le nom BACH.) Cette dernière mesure, incomplète, contient 14 notes. La dernière fugue se termine sur un thème qui est basé sur les notes *si $\flat$  la do si $\flat$* , qui, en notation musicale allemande, correspond aux quatre lettres BACH<sup>13</sup>. Il y a une analyse complète de cette pièce dans la partie II de [4], dans laquelle les auteurs soutiennent que BACH y rappelle de manière symbolique divers épisodes de sa vie. D'après cette analyse, on lit successivement dans cette pièce l'année de la naissance de BACH (1685), l'année de la mort de son père (1695), l'année où il a quitté sa maison pour s'installer à Lüneburg (1700), l'année où il est entré à la cour de Weimar (1703), et ainsi de suite.

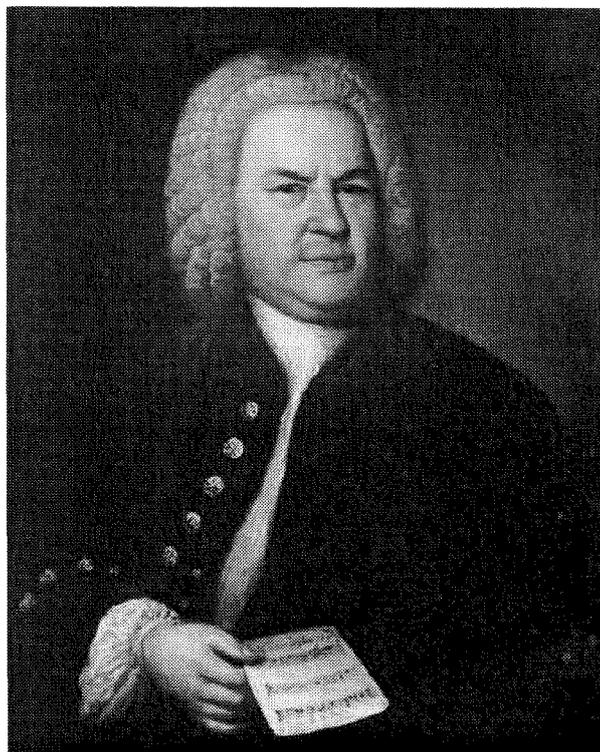
12. Notons que BACH utilisait l'alphabet latin. Cet alphabet comporte 24 lettres. Les lettres *i* et *j* y ont la même valeur numérique, et il en est de même pour *u* et *v*.

13. Notons que ce motif BACH apparaît à la fin de l'*Offrande Musicale*, des *Variations canoniques* et de l'*Art de la fugue*, les trois pièces présentées à la Société Mizler.

L'*Art de la fugue* est le testament musical de BACH, mais ce n'est pas la dernière pièce qu'il a composée. Sur son lit de mort, et alors qu'il était devenu complètement aveugle, BACH dicta son choral *Devant Ton trône j'avance* ("Vor deinen Thron tret'ich"), un autre chef d'œuvre en matière de contrepoint, dans lequel le thème fait 14 notes. Ce fut sa dernière signature.

## Bibliographie

- [1] A. BASSO, *Frau Musika. La vita e le opere di J. S. Bach*, éd. EDT, Torino, 2 volumes, 1979-1983. Trad. Française Fayard, 1984-85.
- [2] R. de CANDÉ, *Jean-Sébastien Bach*, éd. Seuil, 1984.
- [3] I. GRATTAN-GUINNESS, *Mozart 18, Beethoven 32: hidden shadows of integers in classical music* in *History of mathematics. States of the art. Studies in honor of Christoph J. Scriba* (Joseph W. DAUBEN, Menso FOLKERTS, Eberhard KNOBLOCH and Hans WUSSING), éd. Academic Press (1996) p. 29-47.
- [4] K. van HOUTEN et M. KASBERGEN, *Bach et le Nombre*, éd. Pierre Mardaga, Liège, 1992.
- [5] R.C. READ, Combinatorial problems in the theory of music, *Discrete Math.* 167/168 (1997) p. 543-551.



Portrait de Bach par Haussmann, avec dans la main le canon énigmatique BWV1076 (BWV1087 à partir de 1972)

FIGURE 3